ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 251
Α2. Θεωρία σελ. 273
Α3. Θεωρία σελ. 334
Α4. Σ, Λ, Λ, Λ, Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1) **α)** Είναι $g'(x)=1>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ, άρα και «1−1». Επίσης πεδίο ορισμού της g είναι το ℝ και σύνολο τιμών το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Άρα η g αντιστρέφεται και η g^{-1} έχει πεδίο ορισμού το ℝ και τύπο που βρίσκεται ως εξής : $y=x-1 \Leftrightarrow x=y+1$. Άρα $g^{-1}(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Η $g^{-1}\circ h$ έχει πεδίο ορισμού το $\left\{x\in\mathbb{R}^*: h(x)\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^*$ και τύπο $\left(g^{-1}\circ h\right)(x)=g^{-1}\left(h(x)\right)=g^{-1}\left(x+\dfrac{4}{x}\right)=x+\dfrac{4}{x}+1=\dfrac{x^2+x+4}{x}$.

Β2) Είναι $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x}$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

Τ.Μ. -3 Τ.Ε. 5

Β3) Είναι $0<\alpha<1$, άρα $0<\alpha<2$, οπότε $f(\alpha)>5 \Leftrightarrow 2f(\alpha)>10$
Είναι $0<2\alpha<2$, οπότε $f(2\alpha)>5$
Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $2f(\alpha)+f(2\alpha)>15 \Leftrightarrow \dfrac{2f(\alpha)+f(2\alpha)}{3}>5$,
Όμως $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=5$, $f\left((0,2)\right)=\left(\lim\limits_{x\to2^-} f(x), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right)=(5,+\infty)$.
Επειδή $\dfrac{2f(\alpha)+f(2\alpha)}{3}\in f\left((0,2)\right)$ θα υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(x_0)=\frac{2f(\alpha)+f(2\alpha)}{3}.$$

Το x_0 είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,2).
(Αποδεικνύεται και με τα θεωρήματα Bolzano και ενδιάμεσων τιμών).

Β4) Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $x=0$ είναι η μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-1\cdot x\right]=1$, η ευθεία $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Β5) Είναι : $E=\displaystyle\int_1^e\left|\frac{x^2+x+4}{x}-x-1\right|dx=\int_1^e\left|\frac{4}{x}\right|dx=\int_1^e\frac{4}{x}dx=4\int_1^e\frac{1}{x}dx=4\left[\ln x\right]_1^e=4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Είναι $f(x)-g'(x)=e^x-1$ (1).

$$g(1)-g(0)=\int_0^1 g'(x)\,dx=\int_0^1\left[f(x)-e^x+1\right]dx=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 e^x\,dx+\int_0^1 1dx\ \ +\int_0^1 1dx$$

$$=e-1-\left[e^x\right]_0^1+\left[x\right]_0^1=1$$

Γ2) $g(1)-g(0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{g(1)-g(0)}{1-0}=1$. Όμως από το Θ.Μ.Τ. για τη g στο $[0,1]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=\dfrac{g(1)-g(0)}{1-0} \Leftrightarrow g'(\xi)=1$. Το ξ είναι μοναδικό γιατί η g' είναι γνησίως αύξουσα.

(Αποδεικνύεται και με θεώρημα Rolle).

Επομένως :

Γ3) **α)** $x>\xi \overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g'(x)>g'(\xi) \Rightarrow f(x)-e^x+1>1 \Rightarrow f(x)>e^x$.

$x<\xi \overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g'(x)<g'(\xi) \Rightarrow f(x)-e^x+1<1 \Rightarrow f(x)<e^x$.

β) Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα (α) έχουμε :

$$\int_0^\xi\left|f(x)-e^x\right|dx=\int_\xi^1\left|f(x)-e^x\right|dx \Leftrightarrow -\int_0^\xi\left(f(x)-e^x\right)dx=\int_\xi^1\left(f(x)-e^x\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\xi\left(g'(x)-1\right)dx+\int_\xi^1\left(g'(x)-1\right)dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1\left(g'(x)-1\right)dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[g(x)\right]_0^1-\left[x\right]_0^1=0 \Leftrightarrow g(1)-g(0)-1=0 \overset{\text{Ερ.Γ1}}{\Leftrightarrow} 1-1=0 \text{ που ισχύει.}$$

Η ευθεία $x=\xi$ χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, e^x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ σε δυο ισοδύναμα χωρία.

Γ4) Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{f(x)-g'(x)}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{\left|e^x-1\right|}\le\dfrac{1}{\left|e^x-1\right|}$, οπότε $-\dfrac{1}{\left|e^x-1\right|}\le\dfrac{\eta\mu x}{f(x)-g'(x)}\le\dfrac{1}{\left|e^x-1\right|}$ … κριτήριο παρεμβολής … και το όριο είναι ίσο με 0.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Είναι $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge f(0)$ στο $(-1,1)$, 0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(-1,1)$, f παραγωγίσιμη στο 0 $\cdots$ (θ. Fermat)

Δ2) **α)** Για $x\ne 0$ έχουμε $\left(x\ln|x|\right)'=\ln|x|+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln|x|+1)$.

β) Από τη σχέση $xf'(x)-f(x)=-4x^2\left(1+\ln|x|\right)$ για $x\ne 0$, έχουμε

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-4\left(1+\ln|x|\right) \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(-4x\ln|x|\right)', \text{ για κάθε}$$

$x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

Επομένως $\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} = -4x\ln|x| + c_1,\ x \in (-\infty,0) \\ \dfrac{f(x)}{x} = -4x\ln|x| + c_2,\ x \in (0,+\infty) \end{cases}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = f\,'(0) = 0$ και

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\ln|x|\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln|x|\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=} \cdots = 0$. Άρα $c_1 = c_2 = 0$

Άρα, επειδή και $f(0) = 0$, προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Δ3) **α)** Για $x \neq 0$ έχουμε $f\,'(x) = \cdots = -4x\left(2\ln|x| + 1\right)$

Για $x \neq 0$ έχουμε $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ και

$f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln|x| + 1 > 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ή $x < -\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Η μονοτονία της συνάρτησης φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{e}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		1		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	
			Τ.Ε. 0		Τ.Μ $\frac{2}{e}$		Τ.Ε. 0		Τ.Μ $\frac{2}{e}$		Τ.Ε. 0		

β) $\dfrac{k}{x^2} + 2\ln x^2 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left(f(x) = k \text{ και } x \neq 0\right)$ (2).

Η εξίσωση (2):

- Είναι αδύνατη στο [-1,1] **ανν** «αν και μόνο αν» $k < 0$ ή $k > \dfrac{2}{e}$.
- Έχει δυο ακριβώς λύσεις στο [-1,1] **ανν** $k = 0$ ή $k = \dfrac{2}{e}$. (Στην περίπτωση που k=0 οι λύσεις είναι οι x_1= -1 και x_2= 1, «το 0 απορρίπτεται»).
- Έχει τέσσερις ακριβώς λύσεις στο [-1,1] **ανν** $0 < k < \dfrac{2}{e}$.

Δ4) **α)** Η f προφανώς είναι άρτια γιατί αν , τότε $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = f(x)$.

Είναι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(-x)\,dx \overset{u=-x}{=} \ldots = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

Άρα: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$

β) **<u>1ος τρόπος.</u>**

$$\frac{F(\beta)-F(-1)}{2}<\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-1}^{\beta} f(x)dx<2\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-1}^{\beta} f(x)dx<\int_{-1}^{1} f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{\beta} f(x)dx-\int_{-1}^{1} f(x)dx<0 \Leftrightarrow \int_{1}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{\beta} f(x)dx<0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \int_1^{\beta} f(x)dx<0$, που ισχύει, γιατί $f(x)<0$ για $x>1$.

<u>$2^{ος}$ τρόπος.</u>

$$\frac{F(\beta)-F(-1)}{2}<\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow F(\beta)-F(-1)<\int_{-1}^{1} f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(\beta)-F(-1)<F(1)-F(-1) \Leftrightarrow F(\beta)<F(1) \Leftrightarrow F(\beta)-F(1)<0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \int_1^{\beta} f(x)dx<0$, που ισχύει.

<u>$3^{ος}$ τρόπος.</u>

$$\frac{F(\beta)-F(-1)}{2}<\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow F(\beta)-F(-1)<\int_{-1}^{1} f(x)dx \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow F(\beta)-F(-1)<F(1)-F(-1) \Leftrightarrow F(\beta)<F(1)$ που ισχύει γιατί F γνησίως φθίνουσα, αφού $F'(x)=f(x)<0$ για $x>1$.