ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ
Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΒΟΡΕΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ)
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
20 ΜΑΪΟΥ 2020

Η διεξαγωγή του διαγωνίσματος **γίνεται στη μνήμη του πρόσφατα εκλιπόντος ε-ξαίρετου συναδέλφου Ιωάννη Ράλλη, Συντονιστή Εκπαιδευτικού Έργου ΠΕ03 Β. Αιγαίου**.

ΕΠΟΠΤΕΙΑ

Πρόδρομος Ελευθερίου, Μαθηματικός, Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

Ράλλης Ιωάννης, ΖΕΙ ΠΑΝΤΑ ΣΤΟ ΜΥΑΛΟ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΚΑΡΔΙΑ ΜΑΣ, συμβάλλει με την επιθυμία του στη διεξαγωγή του συγκεκριμένου διαγωνίσματος, συντροφεύει και καθοδηγεί τη μαθηματική σκέψη μας από εκεί ψηλά που βρίσκεται παρέα με τους Αγγέλους.

1. **Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Λέσβου**
   - **Ελευθερίου Πρόδρομος,** Μαθηματικός, Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος.
   - **Κεφαλάς Νικόλαος,** Μαθηματικός στο ΓΕ.Λ. Παμφίλων.
   - **Μαμάκος Θωμάς,** Μαθηματικός στο 2ο ΓΕ.Λ. Μυτιλήνης.
2. **Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Σάμου**
   - **Γιαννούλης Στέφανος,** Μαθηματικός στο «Πυθαγόρειο» ΓΕ.Λ.
   - **Κίννας Κωσταντίνος,** Μαθηματικός στο «Πυθαγόρειο» ΓΕ.Λ.
3. **Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Χίου**
   - **Διαμάντας Ανδρέας,** Μαθηματικός στο ΓΕ.Λ. Καλλιμασιάς.
   - **Τομάζος Γεώργιος,** Μαθηματικός στο ΓΕ.Λ. Καλλιμασιάς.
   - **Τσικαλάς Δημήτριος,** Μαθηματικός στο 2ο ΓΕ.Λ. Χίου.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ (ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ)
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
20 ΜΑΪΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 7

Α2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f ορισμένης σ' ένα διάστημα Δ;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3).

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\frac{1}{e^x}$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_o \in \Delta$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f'(x_o)=0$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ και α >1 είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

ε) Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_o.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \frac{x^2+4}{x}, \quad g(x) = x+1 \text{ και } h(x) = (f\circ g)(x).$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμό το διάστημα $A = (-1, +\infty)$ (μονάδες 3) και για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$h(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1} \quad \text{(μονάδες 2)}$$

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι, αν $\lim_{x\to+\infty}\left(h(x) - \lambda x\right) = 1$, τότε:

α) λ = 1 και

Μονάδες 5

β) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+1)\cdot h(x)} - \lambda x\right) = 1$

Μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h παρουσιάζει στο $x_o = 1$ ολικό ελάχιστο το 4 και μάλιστα η συνάρτηση h μόνο για x = 1 παίρνει την τιμή 4.

Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x^2+2x+5}{x+1} = 4\text{συν}(2\pi x)$$

έχει στο διάστημα $(-1, +\infty)$ ακριβώς μια λύση, την x = 1.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- $f(x) < 1$
- $f(x) + f(-x) = 1$
- $f'(x) + e^x \cdot f^2(x) = 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφή της f και είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \ln\frac{1-x}{x}$$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι, αν $g(x) = \ln\dfrac{x}{1-x}$, τότε υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$g(1-x_o) = f(x_o) = x_o$$

Μονάδες 6

Γ4. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος (Γ3), τότε να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $\left(x_o, f^{-1}(x_o)\right)$ δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η παράγωγος f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση και, επιπλέον, ισχύουν $f(2) = 0$ και $f'(0) = 3$.

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση g με $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

Δ1. α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι για κάθε $x > e$ ισχύει:

$$x^e < e^x$$

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \to e^+} \frac{g(x-e)}{f'(x^e) - f'(e^x)}$$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση gof' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι, αν α, β>0 και για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$(gof')(\alpha^{\ln x}+\beta^{\ln x})\leq(gof')(2)$$

τότε $\alpha\cdot\beta=1$.

Μονάδες 4

Δ4. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+1)\geq f'(2)(x-1)$$

Μονάδες 5

β) Θεωρούμε σημείο Μ(x, f(x)) με x >2 στη γραφική παράσταση της f και το σημείο Α(1, 0) του θετικού ημιάξονα Ox. Αν Ε(x) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΑ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o>2$ ώστε Ε(x_o) = 2020 τετραγωνικές μονάδες.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο **εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρηση: Μια (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ
Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΒΟΡΕΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ</u>

του Ανακεφαλαιωτικού Διαγωνίσματος (Προσομοίωσης)

της Γ΄ τάξης Ημερήσιου Γενικού Λυκείου

στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της 20ης Μαΐου 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 106.

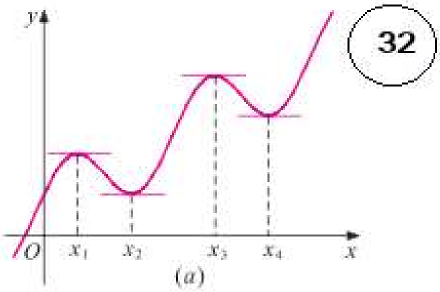
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 143.

Α3

α) Ψ

β) Σχολικό βιβλίο σελίδα 142.

«Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής (Σχ. 32α)»



Α4

α) Λάθος, **β)** Λάθος, **γ)** Λάθος, **δ)** Σωστό, **ε)** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $D_f = (0,\ +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$. $A = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

Έχουμε:

$g(x) \in D_f \Leftrightarrow x+1 \in (0,\ +\infty) \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Άρα $A = (-1,\ +\infty)$.

Αν $x \in A$, τότε $h(x) = (fog)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \frac{(x+1)^2+4}{x+1} = \frac{x^2+2x+5}{x+1}$.

Άρα $h(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1}$.

Β2. α) $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-\lambda x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+5}{x+1}-\lambda x\right) =$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+5-\lambda x^2-\lambda x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\lambda)x^2+(2-\lambda)x+5}{x+1}$$

- Αν λ=1, τότε $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+5}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$

- Αν λ≠1, τότε $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-\lambda)x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\lambda)x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lambda<1 \\ -\infty, & \text{αν } \lambda>1 \end{cases}$

Επομένως: αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-\lambda x\right) = 1$ **,** τότε λ = 1.

Β2. β) Για λ = 1, περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,\ +\infty)$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+1)\cdot h(x)}-\lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+1)\frac{x^2+2x+5}{x+1}}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+5-x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+x} \overset{|x|=x}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{2}{2} = 1\,.$$

B3. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-1,\ +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

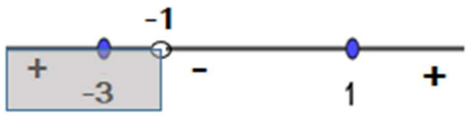
$$h'(x)=\frac{\left(x^2+2x+5\right)'(x+1)-(x+1)'\left(x^2+2x+5\right)}{(x+1)^2}=\frac{(2x+2)(x+1)-\left(x^2+2x+5\right)}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2x^2+4x+2-x^2-2x-5}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}.$$

$x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=1$

Επειδή όμως το πεδίο ορισμό της h είναι το διάστημα $A=(-1,\ +\infty)$, θα έχουμε:



- $h'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-1,\ 1)$
- $h'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(1,\ +\infty)$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,\ 1]$ γιατί είναι συνεχής σ' αυτό και $h'(x)<0$ στο $(-1,\ 1)$, οπότε, αν $-1 < x < 1$, τότε $h(x) > h(1) = 4$.

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$ γιατί είναι συνεχής σ' αυτό και $h'(x)>0$ στο $(1,\ +\infty)$, οπότε, αν $x > 1$, τότε $h(x) > h(1) = 4$.

Άρα, η h μόνο για $x = 1$ παίρνει την τιμή 4.

B4. Επειδή για κάθε $x\in(-1,\ +\infty)$ είναι:

$$\frac{x^2+2x+5}{x+1}\geq 4 \text{ και } 4\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\leq 4$$

η εξίσωση :

$$\frac{x^2+2x+5}{x+1}=4\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\text{, } \mathbf{(1)}$$

έχει λύση στο διάστημα $(-1,\ +\infty)$ μόνο αν υπάρχει τιμή του $x \in (-1,\ +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{x^2+2x+5}{x+1}=4,\ \textbf{(2)} \qquad \text{και} \qquad 4\text{συν}(2\pi x)=4,\ \textbf{(3)}$$

Σύμφωνα με το ερώτημα (Β3), η (2) επαληθεύεται μόνο για μια τιμή του $x \in (-1,\ +\infty)$, την $x = 1$.

Επειδή για x = 1 επαληθεύεται και η (3), συμπεραίνουμε ότι εξίσωση (1) έχει, στο διάστημα $(-1,\ +\infty)$, ακριβώς μια λύση την x = 1.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει x_o, με $f(x_o) = 0$, τότε από τη σχέση $f(x)+f(-x)=1$ έχουμε: $f(x_o)+f(-x_o)=1 \Rightarrow 0+f(-x_o)=1 \Rightarrow f(-x_o)=1$ άτοπο, αφού $f(x)<1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. β) $f'(x)+e^x \cdot f^2(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-e^x \cdot f^2(x)$, και επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=e^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(e^x\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=e^x+c,\ c \in \mathbb{R},\ \textbf{(1)}$$

Όμως: $f(0)+f(-0)=1 \Leftrightarrow 2f(0)=1 \Leftrightarrow f(0)=\dfrac{1}{2}$

Άρα, λόγω της (1) είναι: $\dfrac{1}{f(0)}=e^0+c \Leftrightarrow 2=1+c \Leftrightarrow c=1$

Επομένως: $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

Γ2. Είναι $f'(x)=\dfrac{-(1+e^x)'}{\left(1+e^x\right)^2}=-\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}<0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως παραγωγίσιμη, και γνησίως φθίνουσα , άρα το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$. Όμως:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^x\right) = +\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

Άρα $f(\mathbb{R}) = (0,\ 1)$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα συμπεραίνουμε ότι η f είναι 1-1, άρα ορίζεται η αντίστροφή της και ισχύει $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (0,\ 1)$.

Αν $y \in (0,\ 1)$ και $x \in \mathbb{R}$ τότε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^x} = y \Leftrightarrow \left(1+e^x\right)y = 1 \Leftrightarrow e^x y = 1 - y \Leftrightarrow e^x = \frac{1-y}{y} \Leftrightarrow x = \ln\frac{1-y}{y}$$

Άρα, $f^{-1}(y) = \ln\dfrac{1-y}{y},\ 0 < y < 1$.

Επομένως: $f^{-1} : (0,\ 1) \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1-x}{x}$

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x,\ x \in [0,\ 1]$.

Είναι: $h(0) = f(0) = \dfrac{1}{2}$, $h(1) = f(1) - 1 < 0$, αφού $f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ και
- $h(0) \cdot h(1) < 0$

σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_o \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $h(x_o) = 0$.

Όμως: $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$, αφού $f'(x) < 0$, επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, οπότε η $x = x_o$ είναι η μοναδική ρίζα της.

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_o) = 0$ ή ισοδύναμα:

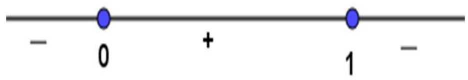
$$f(x_o) = x_o.$$

▶ **Θα αποδείξουμε ότι** $x_o = g(1 - x_o)$ **(1)**

Η συνάρτηση $g(x) = \ln\dfrac{x}{1-x}$ ορίζεται αν και μόνο αν $\dfrac{x}{1-x} > 0$.

Έχουμε:

$\dfrac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$



Άρα $D_g = (0,\ 1)$.

Επειδή $x_o \in (0,\ 1)$ έχουμε:

$0 < x_o < 1 \Rightarrow 0 > -x_o > -1 \Rightarrow 1 > 1 - x_o > 0$, δηλαδή $(1 - x_o) \in D_g$.

Είναι: $g(1-x_o) = \ln\dfrac{1-x_o}{1-(1-x_o)} = \ln\dfrac{1-x_o}{x_o} = f^{-1}(x_o)$, **(2)**

Όμως, $f(x_o) = x_o$, οπότε $x_o = f^{-1}(x_o) \overset{(2)}{=} g(1-x_o)$

Επομένως, υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0,\ 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$g(1-x_o) = f(x_o) = x_o.$$

Γ4. Η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $u = \dfrac{1-x}{x}$ και $y = \ln x$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $\left(x_o, f^{-1}(x_o)\right)$ είναι:

$$ε:\ y - f^{-1}(x_o) = \left(f^{-1}\right)'(x_o)(x - x_o)$$

Επειδή όμως $f(x_o) = x_o$ θα είναι $f^{-1}(x_o) = x_o$, οπότε:

$$ε:\ y - x_o = \left(f^{-1}\right)'(x_o)(x - x_o)$$

Αν υποθέσουμε ότι η ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε:

$-x_o = \left(f^{-1}\right)'(x_o)(-x_o) \Rightarrow x_o = x_o\left(f^{-1}\right)'(x_o) \overset{x_o \neq 0}{\Rightarrow} \left(f^{-1}\right)'(x_o) = 1$ άτοπο,

Γιατί:

$f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1-x}{x} = \ln(1-x) - \ln x$, αφού $x \in (0,\ 1)$, οπότε:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \left(\ln(1-x) - \ln x\right)' = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}.$$

Άρα $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} < 0$, $x \in (0,\ 1)$,

Επομένως για κάθε $x_o \in (0,\ 1)$ είναι $\left(f^{-1}\right)'(x_o) < 0 \neq 1$.

Άρα, δεν υπάρχει εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $D_g = (0\ +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι: $g'(x) = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - (x)' \cdot \ln x}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$,

Έχουμε:

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow e > x$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow 1 < \ln x \Leftrightarrow \ln e < \ln x \Leftrightarrow e < x$

Η g είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $(0,\ e]$, γιατί είναι συνεχής σ' αυτό, και $g'(x) > 0$ στο $(0,\ e)$.
- γνησίως φθίνουσα στο $[e,\ +\infty)$, γιατί είναι συνεχής σ' αυτό, και $g'(x) < 0$ στο $(e,\ +\infty)$

και επειδή η g είναι συνεχής στο $x_o = e$ θα παρουσιάζει μέγιστο ίσο με $g(e) = \dfrac{1}{e}$.

Έχουμε:

$$x > e \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x) < g(e) \Rightarrow \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e} \Rightarrow e\ln x < x \Rightarrow \ln x^e < \ln e^x \Rightarrow x^e < e^x.$$

Άρα για κάθε x > e ισχύει: $x^e < e^x$.

β. Θέτουμε $u = x - e > 0, x > e$. Είναι $\lim\limits_{x \to e^+} u = \lim\limits_{x \to e^+}(x-e) = 0$

Άρα:

$$\lim_{x \to e^+} g(x-e) = \lim_{x \to e^+} \frac{\ln(x-e)}{x-e} = \lim_{u \to 0^+} \frac{\ln u}{u} = \lim_{u \to 0^+}\left(\frac{1}{u} \cdot \ln u\right) = -\infty \quad \textbf{(1)}$$

γιατί $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$ και $\lim\limits_{u \to 0^+} \ln u = -\infty$.

Οι συναρτήσεις $f'(x^e)$ και $f'(e^x)$ είναι συνεχείς ως συνθέσεις των συνεχών συναρτήσεων $y = x^e$, f' και $y = e^x$, f'. Επομένως:

$$\lim_{x \to e}[f'(x^e) - f'(e^x)] = f'(e^e) - f'(e^e) = 0, \quad \textbf{(2)}$$

Σύμφωνα με το ερώτημα (α) για κάθε x > e ισχύει: $x^e < e^x$, οπότε, για κάθε x > e έχουμε:

$$x^e < e^x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x^e) < f'(e^x) \Rightarrow f'(x^e) - f'(e^x) < 0 \quad \textbf{(3).}$$

Συμπεραίνουμε, λόγω των (2) και (3), ότι: $\lim\limits_{x \to e} \frac{1}{f'(x^e) - f'(e^x)} = -\infty$, **(4)**

Επομένως:

$$\lim_{x \to e} \frac{g(x-e)}{f'(x^e) - f'(e^x)} = \lim_{x \to e}\left(g(x-e)\frac{1}{f'(x^e) - f'(e^x)}\right) \overset{(1),(4)}{=} +\infty$$

Δ2. Επειδή f' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f'(0) < f'(x_1) < f'(x_2)$ **(5).**

Όμως $f'(0) = 3 > e$, οπότε, λόγω της (5), θα ισχύει ότι $f'(x_1), f'(x_2) \in (e, +\infty)$ και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x_1) < f'(x_2) \Rightarrow g(f'(x_1)) > g(f'(x_2)) \Rightarrow (gof')(x_1) > (gof')(x_2).$$

Επομένως, η συνάρτηση gof' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Δ3. Είναι $a^{\ln x} > 0$ και $\beta^{\ln x} > 0$, οπότε $a^{\ln x} + \beta^{\ln x} \in (0, +\infty)$ και επειδή η gof' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ ισχύει:

$$(gof')(a^{\ln x}+\beta^{\ln x})\le (gof')(2)\Rightarrow a^{\ln x}+\beta^{\ln x}\ge 2 \text{ για κάθε } x>0$$

Δηλαδή, για κάθε $x>0$ ισχύει $a^{\ln x}+\beta^{\ln x}\ge 2$, όπου α,β > 0 **(6)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=a^{\ln x}+\beta^{\ln x}$, $x>0$.

Είναι φ(1) = 2, οπότε, λόγω της (6), ισχύει φ(x) ≥ φ(1) για κάθε $x>0$.

Άρα, η συνάρτηση φ παρουσιάζει ελάχιστο στο 1, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(0,\ +\infty)$, και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, ισχύει $\varphi'(1)=0$.

Όμως:

$$\varphi'(x)=a^{\ln x}\cdot\ln a\cdot\frac{1}{x}+\beta^{\ln x}\cdot\ln\beta\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow\varphi'(1)=\ln a+\ln\beta\Rightarrow 1=\ln(a\cdot\beta)\Rightarrow a\cdot\beta=1$$

Δ4. Αν x < 1, τότε εφαρμόζοντας για την f το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x+1,2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(x+1,\ 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(2)}{(x+1)-2}\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(x+1)}{x-1}\ \text{, }\mathbf{(7)}$$

Όμως $\xi<2\Rightarrow f'(\xi)\overset{f'\uparrow}{<}f'(2)\overset{(7)}{\Rightarrow}\dfrac{f(x+1)}{x-1}<f'(2)\Rightarrow f(x+1)>f'(2)(x-1)\,,x-1<0$

- αν x >1, τότε εφαρμόζοντας για την f το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[2,x+1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(x+1,\ 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(2)}{(x+1)-2}\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(x+1)}{x-1},\ \mathbf{(8)}$$

Όμως:

$$\xi>2\Rightarrow f'(\xi)\overset{f'\uparrow}{>}f'(2)\overset{(8)}{\Rightarrow}\frac{f(x+1)}{x-1}>f'(2)\Rightarrow f(x+1)>f'(2)(x-1),\ x-1>0.$$

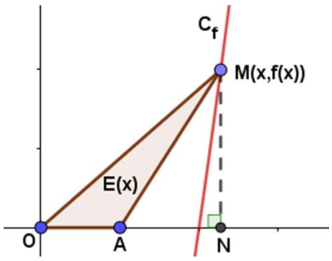
- αν x = 1, τότε η σχέση $f(x+1)\ge f'(2)(x-2)$ ισχύει ως ισότητα.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+1)\ge f'(2)(x-1)$.

β) Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα ισχύει:

$x>0 \Rightarrow f'(x)>f'(0) \Rightarrow f'(x)>3$, οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και f(2) = 0 οπότε θα ισχύει: $x>2 \Rightarrow f(x)>f(2) \Rightarrow f(x)>0$.



Είναι: $E(x)=\frac{1}{2}(OA)(MN)=\frac{1}{2}f(x)$.

Η συνάρτηση Ε:

- Είναι συνεχής στο $(2,\ +\infty)$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής.
- Είναι γνησίως αύξουσα, αφού $E'(x)=\frac{1}{2}f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$.
- $\lim\limits_{x\to 2^+}E(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}f(2)=0$, αφού f συνεχής στο $x_o = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}E(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}f(x)=+\infty$, γιατί σύμφωνα με το ερώτημα Δ3 για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ισχύει: $f(x+1)\geq f'(2)(x-1)$ και θέτοντας όπου x+1 το x παίρνουμε:

$$f(x)\geq f'(2)(x-2),\ \textbf{(9)}$$

Όμως: $f'(2)>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}f'(2)(x-2)=+\infty\overset{(9)}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

Άρα: $E(2,+\infty)=\left(\lim\limits_{x\to 2^+}E(x),\lim\limits_{x\to+\infty}E(x)\right)=(0,+\infty)$ και, επομένως, υπάρχει $x_o>2$ τέτοιο, ώστε $E(x_o) = 2020$ και μάλιστα το x_o είναι μοναδικό επειδή η Ε είναι γνησίως αύξουσα.

ΣΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΑΛΛΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ Γ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΣ Δ4.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α)

2ος τρόπος

$f(x)+f(-x)=1 \Rightarrow f(-x)=1-f(x)>0$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(-x)>0$ ή ισοδύναμα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και επομένως $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3ος τρόπος

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει x_o, με $f(x_o) = 0$, τότε από τη σχέση:

$$f'(x)+e^x\cdot f^2(x)=0$$

για $x = x_o$ παίρνουμε $f'(x_o)+e^{x_o}f^2(x_o)=0$, οπότε $f'(x_o)=0$.

Όμως $f(x)+f(-x)=1 \Rightarrow f'(x)-f'(-x)=0 \Rightarrow f'(x_o)-f'(-x_o)=0 \overset{f'(x_o)=0}{\Rightarrow} f'(-x_o)=0$

Ισχύει επίσης ότι $f'(-x_o)+e^{-x_o}f^2(-x_o)=0$, άρα $f(-x_o)=0$.

Επομένως $f(x_o)+f(-x_o)=0\neq 1$ άτοπο.

Γ1. β)

2ος τρόπος

Σύμφωνα με το ρώτημα Γ1.α) είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως:

$$f(x)=\frac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=1+e^x$$

Θα αποδείξουμε οι συναρτήσεις $\varphi(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ και $\varphi_1(x)=e^x+1$ είναι ίσες.

Είναι:

- $D_\varphi = D_{\varphi_1}=\mathbb{R}$
- $\varphi'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-\dfrac{f'(x)}{-e^{-x}\cdot f'(x)}=e^x=\varphi_1'(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,\ +\infty)$.

οπότε $\varphi(x)=\varphi_1(x)+c$, όμως $\varphi(0)=2=\varphi_1(0)$ και επομένως θα έχουμε:

$\varphi(0)=\varphi_1(0)+c \Leftrightarrow c=0$. Άρα $\varphi(x)=\varphi_1(x)$, δηλαδή $\frac{1}{f(x)}=1+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή

ισοδύναμα $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Θα αποδείξουμε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f.

Για να ορίζεται η αντίστροφή της f αρκεί η f είναι συνάρτηση γνησίως μονότονη.

Η απόδειξη της μονοτονίας της f μπορεί να γίνει με δυο ακόμα 2 τρόπους.

β. τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \overset{e^x \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow 0<1+e^{x_1}<1+e^{x_2} \Rightarrow \frac{1}{1+e^{x_1}}>\frac{1}{1+e^{x_2}} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Επειδή: Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. τρόπος

$f'(x)+e^x f^2(x)=0 \Rightarrow f'(x)=-e^x f^2(x)<0$, αφού f(x) ≠0 κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για να ορίζεται η αντίστροφή της f αρκεί η f είναι συνάρτηση 1-1.

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.

Αν $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε:

$$\frac{1}{1+e^{x_1}}=\frac{1}{1+e^{x_2}} \Rightarrow 1+e^{x_1}=1+e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση 1-1 και επομένως ορίζεται η αντίστροφή της.

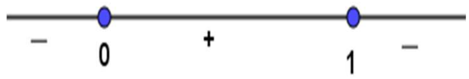
- ▶ **Θα βρούμε την αντίστροφή της f .**

Θέτουμε $f(x)=y$, $x\in\mathbb{R}$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε λοιπόν:

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^x}=y \Leftrightarrow \left(1+e^x\right)y=1 \Leftrightarrow e^x y=1-y \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ e^x = \dfrac{1-y}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-y}{y} > 0 \\ x = \ln\dfrac{1-y}{y} \end{cases},$$

$\dfrac{1-y}{y} > 0 \Leftrightarrow (1-y)y > 0 \Leftrightarrow 0 < y < 1$



Επομένως, $f^{-1}(y) = \ln\dfrac{1-y}{y}$, $0 < y < 1$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1} : (0,\ 1) \to \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \ln\frac{1-x}{x}$$

Γ3. Επειδή $f(x_o) = x_o \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+e^{x_o}} = x_o \Leftrightarrow x_o e^{x_o} + x_o - 1 = 0$.

Θεωρούμε $h(x) = xe^x + x - 1$ η οποία:

- είναι συνεχής στο [0,1] και
- $h(0)h(1) = -1 \cdot e < 0$.
- $h'(x) = e^x + xe^x + 1 > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1-1.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_o στο διάστημα (0, 1) η οποία μάλιστα είναι μοναδική αφού η h είναι 1-1.

► **Θα αποδείξουμε ότι ισχύει** $x_o = g(1-x_o)$ **(1)**

2ος τρόπος.

Για να ισχύει η **(1)** πρέπει $(1-x_o) \in D_g$.

Όμως έχουμε ήδη αποδείξει ότι, αν $x_o \in (0,\ 1)$, τότε $(1-x_o) \in D_g$

Έχουμε:

$$f(x_o)=x_o \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{x_o}}=x_o \overset{x_o\in(0,1)}{\Leftrightarrow} \frac{1-x_o}{x_o}=e^{x_o} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x_o}{x_o}\right)=x_o \Leftrightarrow g(1-x_o)=x_o$$

Επομένως, υπάρχει μοναδικό $x_o\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$g(1-x_o)=f(x_o)=x_o.$$

3ος τρόπος.

Επειδή το σημείο $(x_o, f(x_o))$ ανήκει στην ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄ για να ισχύει η (1) αρκεί η συνάρτηση g(1-x) να είναι η αντίστροφη της f.

Θα αποδείξουμε λοιπόν, ότι $g(1-x)=f^{-1}(x)$, $x\in(0,\ 1)$.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι:

- $D_g = (0,\ 1)$,
- $D_{f^{-1}}=(0,\ 1)$ και
- $x_o\in(0,\ 1)\Rightarrow(1-x_o)\in D_g$

Για κάθε $x\in(0,\ 1)$ είναι $g(1-x)=\ln\frac{1-x}{1-(1-x)}=\ln\frac{1-x}{x}=f^{-1}(x)$

Άρα $g(1-x)=f^{-1}(x)$, $x\in(0,\ 1)$, **(2)**

Όμως, αφού $f(x_o)=x_o$, θα ισχύει $x_o=f^{-1}(x_o)\overset{(2)}{=}g(1-x_o)$

Επομένως, υπάρχει μοναδικό $x_o\in(0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$g(1-x_o)=f(x_o)=x_o.$$

Γ4. Θα αποδείξουμε με δυο ακόμα τρόπους ότι η σχέση $\left(f^{-1}\right)'(x_o)=1$ δεν ισχύει για κανένα $x_o\in(0,\ 1)$.

2ος τρόπος.

Έχουμε: $\left(f^{-1}\right)'(x_o)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_o(x_o-1)}=1 \Leftrightarrow x_o^2-x_o-1=0$

Όμως $x_o^2-x_o-1=0 \Leftrightarrow x_o=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\notin(0,1)$

Επομένως η σχέση $\left(f^{-1}\right)'(x_o)=1$ δεν ισχύει για κανένα $x_o\in(0,1)$.

Άρα, δεν υπάρχει εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3ος τρόπος. Απαγωγή σε άτοπο.

Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in (0,\ 1)$ με $\left(f^{-1}\right)'(x_o)=1$ και θα οδηγηθούμε σε άτοπο.

Επειδή:

- για κάθε $x \in (0,\ 1)$ ισχύει $f(f^{-1}(x))=x$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και
- η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη $(0,\ 1)$,

αν $x \in (0,\ 1)$, τότε:

$$\left(f(f^{-1}(x))\right)'=(x)' \Rightarrow f'(f^{-1}(x))\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1 \Rightarrow$$

$$f'(f^{-1}(x_o))\cdot\left(f^{-1}\right)'(x_o)=1, \ \textbf{(3)}$$

Όμως $f(x_o)=x_o$, οπότε λόγω της (3) παίρνουμε:

$f'(x_o)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x_o)=1 \Rightarrow f'(x_o)=1$, άτοπο γιατί $f'(x)=-\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}<0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα, δεν υπάρχει εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ Δ

Δ4.α) 2ος τρόπος. Με μονοτονία.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x+1)-f'(2)(x-1)$ την οποία θα μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία.

Η συνάρτηση $f(x+1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων y = x+1 και f, οπότε η φ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f(x+1)$ και $-f'(2)(x-1)$.

Είναι $\varphi'(x)=f'(x+1)-f'(2)$.

- Αν x>1, τότε: $x+1>2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x+1)>f'(2) \Rightarrow \varphi'(x)>0$.
- Αν x<1, τότε: $x+1<2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x+1)<f'(2) \Rightarrow \varphi'(x)<0$.

και επειδή η φ είναι συνεχής στο x_o = 1 παρουσιάζει σ' αυτό ολικό ελάχιστο.

Άρα $\varphi(x) \geq \varphi(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμως $\varphi(1)=f(2)-f'(2)(1-1)=0$ και επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$\varphi(x)\geq 0 \Rightarrow f(x+1)-f'(2)(x-1)\geq 0 \Rightarrow f(x+1)\geq f'(2)(x-1)$.

β) Το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΜ μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής:

$$E(x)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)\right|$$

Όμως $\overrightarrow{OA}=(0,\ 1)$, $\overrightarrow{OM}=(x,\ f(x))$, $\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ x & f(x)\end{vmatrix}=f(x)$.

Άρα: $E(x)=\frac{1}{2}|f(x)| \ =\frac{1}{2}f(x)$, αφού $f(x)>0$ για x>2.

▶ **Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_o>2$ ώστε $E(x_o)$ = 2020,**

2ος τρόπος (Μέθοδος θεωρήματος Bolzano)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(x)=\frac{1}{2}f(x)-2020$, $x\in[2,\ +\infty)$.

- $d(2) = \frac{1}{2}f(2) - 2020 = -2020 < 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}f(x) - 2020\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = +\infty$

Άρα υπάρχει α «κοντά» στο $+\infty$, ώστε d(α) > 0.

Επειδή:

- Η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[2,\ \alpha]$ και
- $d(2) \cdot d(\alpha) < 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_o \in (2,\ \alpha)$ με $d(x_o) = 0$.

Όμως $d(x) = \frac{1}{2}f(x) - 2020$, άρα:

$\frac{1}{2}f(x_o) - 2020 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}f(x_o) = 2020 \Rightarrow E(x_o) = 2020$.

Άρα, υπάρχει $x_o > 2$ τέτοιο, ώστε $E(x_o) = 2020$.

Το $x_o \in (2,\ +\infty)$ για το οποίο ισχύει $E(x_o) = 2020$ είναι μοναδικό, αφού η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.